

ARGOMENTO: IL PROBLEMA DELLA SICUREZZA STRUTTURALE

Il problema della sicurezza è da sempre l'argomento centrale della ingegneria delle strutture.

Comunque per giungere ad una valutazione quantitativa (istituire una misura) della sicurezza strutturale occorre arrivare al XIX secolo, segnatamente all'opera di Navier.

Prima di allora le costruzioni erano dimensionate in base a formule empiriche, desunte dalla osservazione del comportamento di opere già realizzate. Sono noti casi di strutture collassate subito dopo la costruzione per insufficienza di stabilità.

Tra le formule empiriche più accreditate ricordiamo quella del Sejourne, che fornisce lo spessore della chiave dei ponti ad arco, basata sulla elaborazione statistica dei dati di più di 3000 opere e la tabella delle sezioni ammissibili per le travi di legno, pubblicata nel 1726 da Jakob Leupold nel suo libro sui ponti.

Tornando a Navier, l'Autore, nel suo celebre testo sulla Resistenza dei Materiali (1a edizione 1826) si propone di fornire i mezzi per valutare la sicurezza delle varie membrature di una costruzione.

Egli distingue, con grande chiarezza, tra tensioni effettive, valutate a partire dai carichi agenti e tensioni di rottura, determinabili sperimentalmente.

Secondo l'Autore allo scopo di garantire la sicurezza non è sufficiente mantenersi semplicemente al di sotto della tensione pericolosa, ma occorre anche mantenersi ad una opportuna distanza da essa.

Tale distanza può essere misurata come differenza fra due tensioni:

$$\Delta\sigma = \sigma_{\text{Rott}} - \sigma_{\text{eserc}}$$

oppure, meglio, come rapporto

$$\gamma = \sigma_{\text{Rott}} / \sigma_{\text{eserc}}$$

in cui  $\gamma$  è il "coefficiente di sicurezza".

E' evidente che è preferibile la seconda formulazione, in quanto secondo essa la distanza dalla condizione di rottura può essere espressa da un unico numero adimensionale, mentre la prima formula richiede necessariamente che  $\Delta\sigma$  vari al variare dei valori delle tensioni in gioco.

L'Autore non fornisce però una motivazione convincente di questa, peraltro ragionevole, necessità.

La motivazione oggi comunemente accettata è la seguente: il coefficiente di sicurezza è un numero volto alla "neutralizzazione" degli effetti delle incertezze e delle fluttuazioni insite inevitabilmente tanto in  $\sigma_{Rott}$  che in  $\sigma_{eserc}$ .

In sostanza tutte le grandezze in gioco non hanno carattere deterministico, ma, al contrario, aleatorio.

La loro modellazione convincente richiede l'applicazione dei metodi della teoria della probabilità e della statistica.

Pertanto anche la sicurezza non può essere garantita in modo assoluto, deterministico, nel senso che alla domanda: "Questa struttura è sicura?" non si può dare una risposta assoluta del tipo "Si/no."

Bisogna accontentarsi di garantire la sicurezza soltanto con riferimento ad un valore prefissato di probabilità, al punto che la probabilità di rottura può essere considerata una misura della sicurezza.

La sicurezza è garantita quando la probabilità di rottura è molto piccola, pur se diversa da zero:

$$P_f = \text{Prob} \{ \text{evento "stato limite"} \} \leq p_{adm}$$

Nel caso di stato limite ultimo (rottura) il valore ammissibile della probabilità di rottura è usualmente compreso tra  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$ .

La scelta di tale livello di confronto è di natura politica, in quanto essa stabilisce indirettamente la quantità di risorse da impiegare nelle costruzioni: tanto minore è  $p_{adm}$ , tanto più è elevato il grado di sicurezza, tanto più costose sono le costruzioni.

In questa filosofia generale la procedura di analisi della sicurezza si articola quindi nelle seguenti fasi operative:

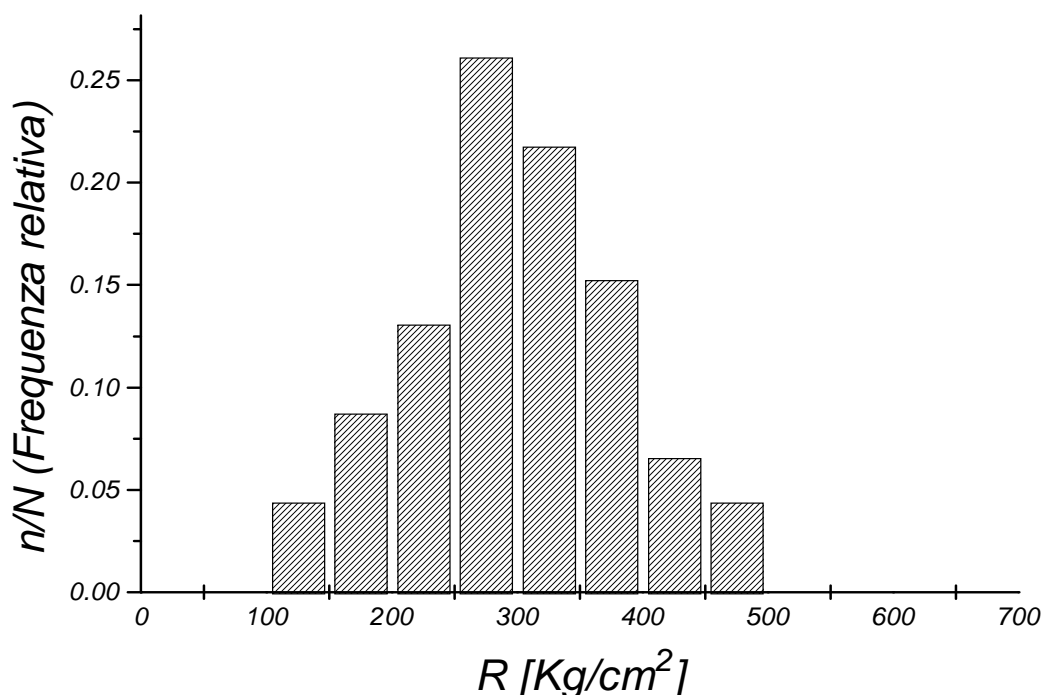
- 1) modellazione probabilistica della domanda di prestazione (azioni),
- 2) modellazione probabilistica della capacità di prestazione delle sezioni (resistenza),
- 3) analisi della risposta strutturale,
- 4) modellazione della/delle condizioni di pericolo che si vogliono evitare (stati limite),
- 5) calcolo della probabilità che tale/tali condizioni si verifichino,
- 6) controllo che la probabilità di rottura sia sufficientemente piccola.

### Modellazione delle incertezze sulla resistenza del materiale

Esaminiamo innanzitutto il problema della modellazione delle incertezze sulla resistenza del materiale, considerando un semplicissimo esempio relativo alla resistenza a compressione  $R$  del calcestruzzo.

Si eseguano  $N$  prove di rottura di altrettanti provini, uguali fra di loro; per ogni prova si determini il valore  $R_i$  corrispondente alla resistenza del generico provino  $i$ .

Si calcolino quindi le frequenze relative  $n_i/N$  come rapporto fra il numero  $n_i$  delle volte in cui si ottiene  $R_i$  compreso tra  $R - \Delta R/2$  e  $R + \Delta R/2$  e si disegni quindi l'istogramma delle frequenze relative.



Questo è un istogramma delle frequenze relative di eventi accaduti (realizzati) nel passato. Come è noto, di problemi di questo tipo si occupa la Statistica.

Come si può notare i valori più elevati delle frequenze relative si presentano nella parte centrale del diagramma, quelli più bassi alle estremità.

Il corrispondente modello di previsione considera  $R$  come una variabile aleatoria.

Con linguaggio non del tutto rigoroso dal punto di vista matematico, ma espressivo e sufficiente per i nostri scopi, possiamo definire una variabile aleatoria come un insieme probabilizzato di numeri.

Dello studio dei modelli probabilistici di previsione si occupa la Probabilità.

Una variabile aleatoria  $X$  è caratterizzata dalla sua funzione densità di probabilità  $f(x)$ , definita come:

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Pr ob}(x \leq X < x + h)}{h}, \text{ di modo che sia:}$$

$$\text{Pr ob}(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

L'area complessiva sottesa dalla  $f(x)$  è pari ad uno, in quanto che la probabilità che si verifichi un evento certo, e cioè che  $X$  sia minore di infinito, è pari ad 1.

Un tipo notevole di distribuzione di probabilità è quella Normale o Gaussiana, che è caratterizzata dalla espressione seguente della densità di probabilità (vedi figura seguente):

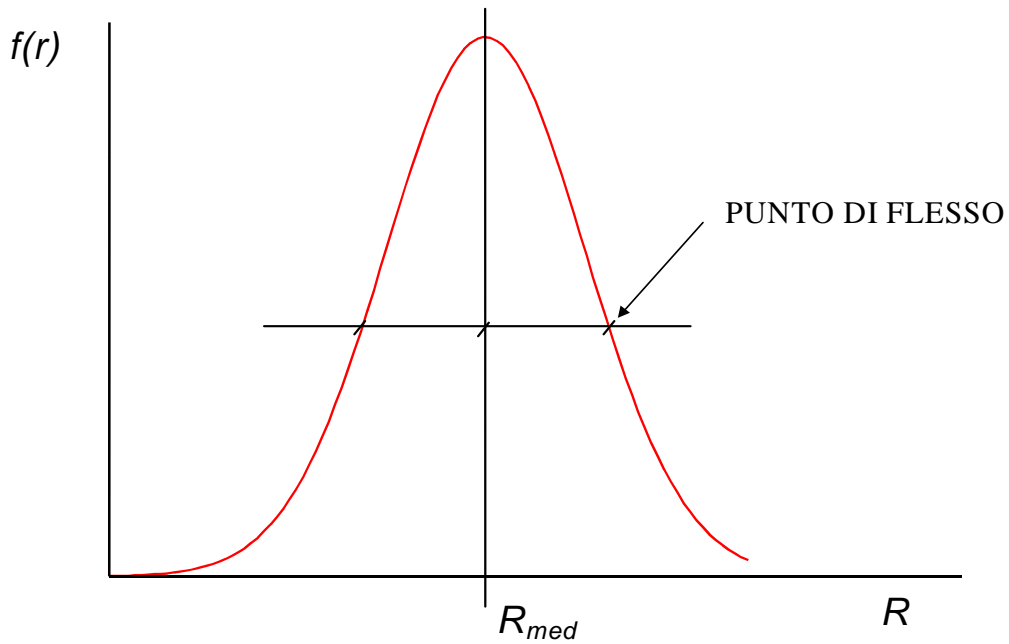
$$N_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Tra le proprietà della distribuzione Gaussiana, si osserva che essa è simmetrica intorno al valore medio di  $X$ ,  $m = X_{\text{med}} = E[X]$  e che quindi valgono le:

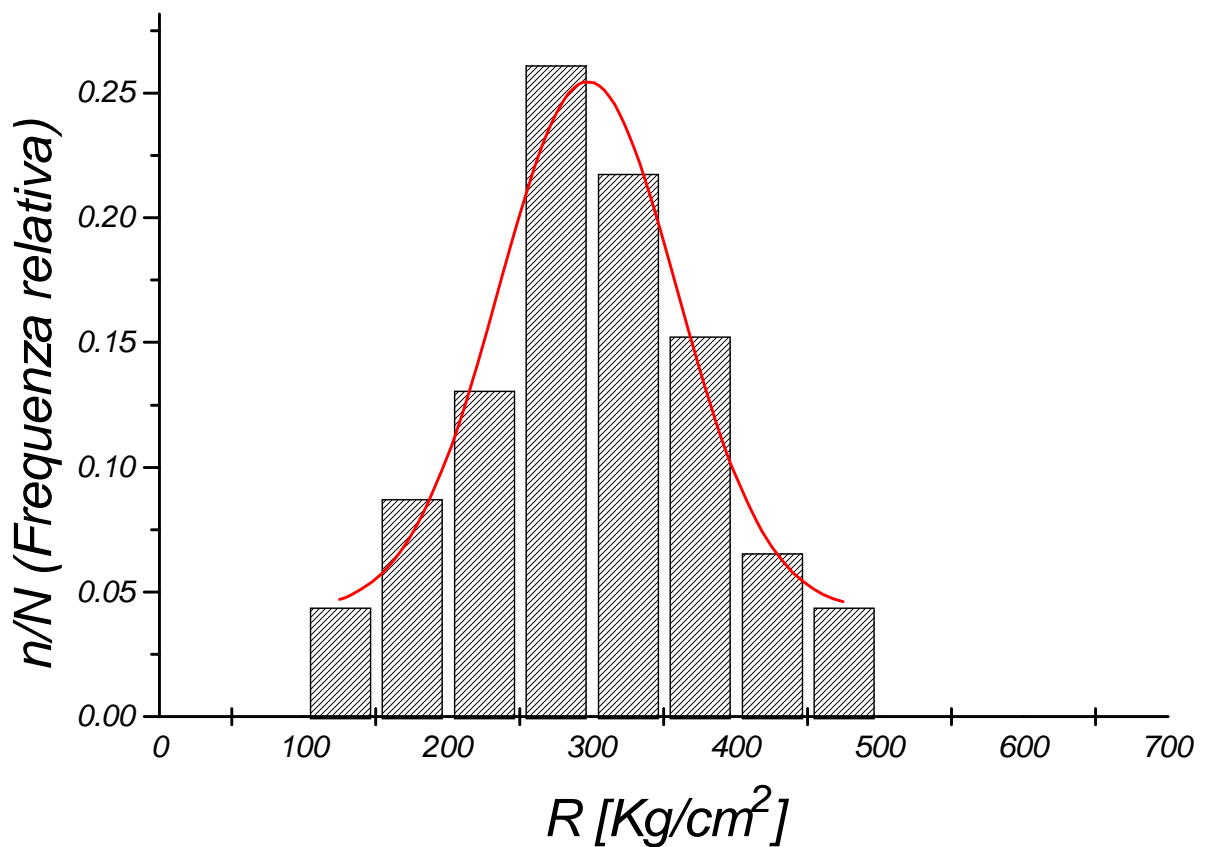
$$\text{Prob}(X \leq X_{\text{med}}) = 0.5$$

$$\text{Prob}(X > X_{\text{med}}) = 0.5$$

Essa presenta due punti di flesso, posizionati a sinistra e a destra del valore medio, da cui distano uno scarto standard  $\sigma$ .



Tale tipo di distribuzione ben si adatta, per il suo andamento, a modellare i risultati della prova sperimentale che abbiamo descritto poc' anzi, come si può vedere osservando la figura seguente.



Nel momento di formulare previsioni, si può quindi considerare la resistenza  $R$  del calcestruzzo come una v.a. gaussiana.

La probabilità che la resistenza  $R$  sia minore del valore prefissato  $r$  può essere così calcolata come:

$$\text{Pr ob}(R < r) = \int_{-\infty}^r f(r) dr$$

in cui  $f(r) = N_{m,\sigma}(r)$ .

Si perviene così in modo molto semplice alla definizione di resistenza caratteristica  $R_{ck}$  del calcestruzzo, che è **il frattile 5% della popolazione statistica delle resistenze**, come:

$$\text{Prob}(R < R_{ck}) = 0.05$$

Analogamente si può definire la resistenza caratteristica dell'acciaio.

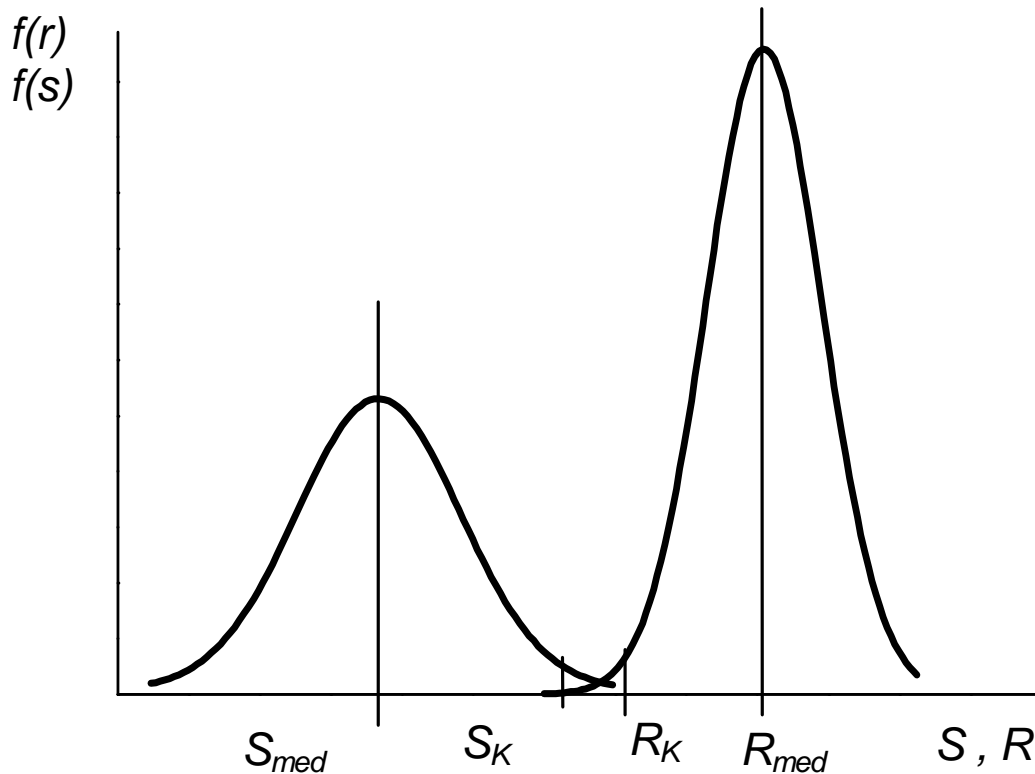
Un modello simile può essere adottato per modellare le incertezze sul carico o meglio sul suo effetto  $S$ .

Di nuovo si trova la definizione di carico caratteristico  $S_k$  come frattile 95% della popolazione statistica dei carichi:

$$\text{Prob}(S < S_k) = 0.95$$

**La verifica di sicurezza consiste nel valutare la probabilità che si verifichi la rottura e cioè che sia  $R < S$  (condizione di stato limite) e quindi nel controllare che essa sia sufficientemente piccola.**

Supponiamo in una prima fase che le due variabili aleatorie R ed S siano statisticamente indipendenti. Allora le loro funzioni di distribuzione  $f(r)$  ed  $f(s)$  possono essere rappresentate sullo stesso piano cartesiano.



Fissato un valore  $\bar{S}$  di S, la probabilità che R sia minore di  $\bar{S}$  è:

$$\text{Pr ob}(R < \bar{S}) = \int_{-\infty}^{\bar{S}} f(r) dr$$

La probabilità che S valga proprio  $\bar{S}$  è:

$$\text{Pr ob}(S = \bar{S}) = f(\bar{S}) d\bar{S}$$

Tenuto conto dell'ipotesi di indipendenza statistica delle due v.a., la probabilità che simultaneamente R sia minore di  $\bar{S}$  ed S sia uguale ad  $\bar{S}$  è:

$$\text{Pr ob}(R < \bar{S} \text{ e che } S = \bar{S}) = f(\bar{S}) d\bar{S} \int_{-\infty}^{\bar{S}} f(r) dr$$

La probabilità di rottura si ottiene allora mediante integrazione su tutto il campo dei possibili valori di S:

$$\text{Pr ob}(R < S) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \left[ \int_{-\infty}^s f(r) dr \right] ds$$

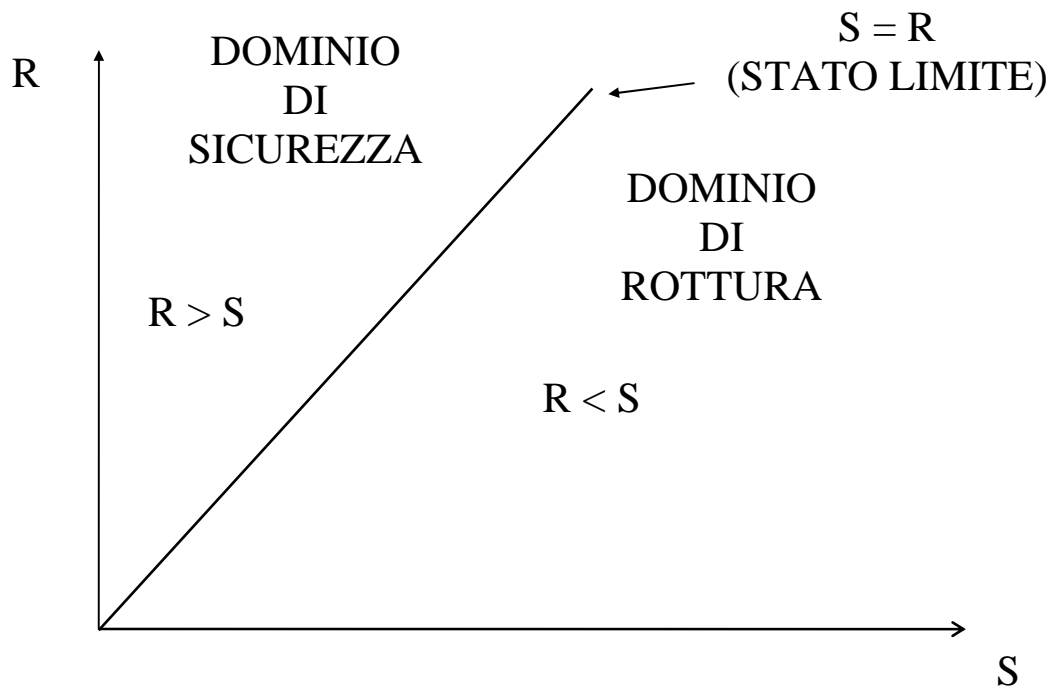
Consideriamo ora il caso, più generale, in cui **le variabili aleatorie che governano il problema non siano statisticamente indipendenti.**

La capacità di prestazione R è una v.a., definita dalla sua funzione densità di probabilità f(r).

La domanda di prestazione S è definita da f(s).

La condizione di stato limite è:

$$R \leq S \text{ o analogamente } G = R - S \leq 0$$



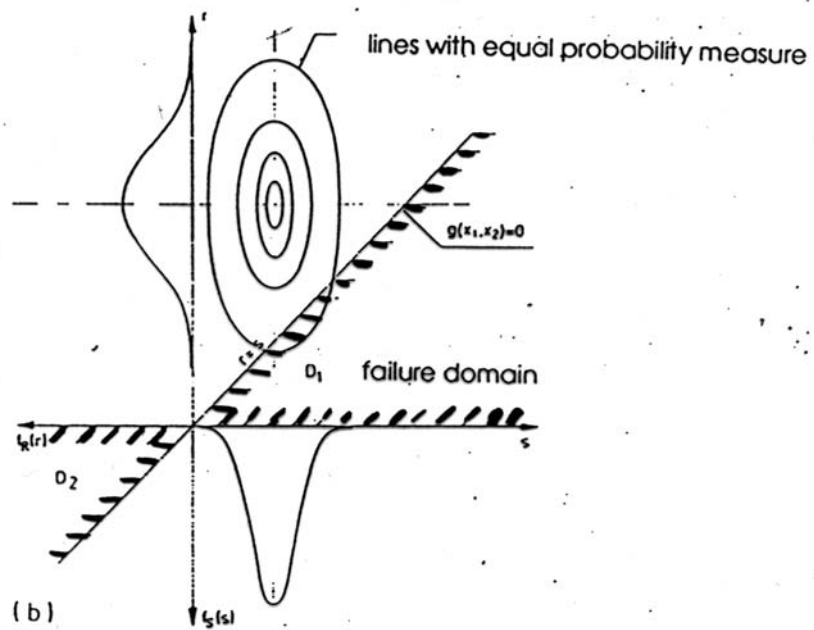
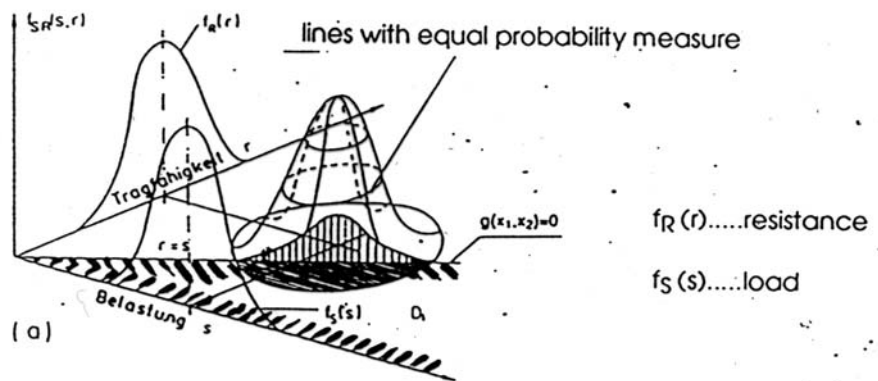
Con riferimento alla figura il dominio  $D$  in cui è soddisfatta la  $R \leq S$  è il dominio di rottura e quello  $D'$  in cui  $R > S$  è il dominio di sicurezza.

La misura della sicurezza è data dalla probabilità che si verifichi l'evento stato limite:  $R \leq S$ :

$$Prob(G \leq 0) = \int_D f(r, s) dA$$

Poiché le due variabili aleatorie non sono statisticamente indipendenti occorre utilizzare la funzione densità di probabilità congiunta delle due v.a.:  $f(r, s)$ .

# QUANTIFICATION OF SAFETY



LIMITSTATE FUNCTION

$$g(x_1, x_2) = 0$$

FAILURE PROBABILITY

$$p_f = P(g(\mathbf{x}) \leq 0) = \int_D f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Secondo la terminologia ricorrente questa procedura viene definita di **Livello 3**, intendendo con tale termine una trattazione probabilistica completa del problema.

Tale procedura diviene rapidamente impraticabile al crescere del numero delle variabili aleatorie in gioco e non di rado una soluzione in forma chiusa è impossibile, per il fatto che spesso la condizione di stato limite non può essere espressa in forma analitica, quanto piuttosto per mezzo di un algoritmo di controllo (caso di taluni fenomeni di danneggiamento, quale ad esempio la fatica).

In questi casi il problema deve essere affrontato mediante tecniche avanzate, per esempio tecniche di simulazione (p.es metodo Monte Carlo).

Sorge così spontanea l'idea di affiancare a quella rigorosa metodologie di analisi semplificate: nascono così i modelli di **Livello 2 e di Livello 1**.

I metodi di **Livello 2** si avvalgono come parametro misuratore della sicurezza, del cosiddetto "indice di sicurezza"  $\beta$ , legato alla probabilità di rottura dalla relazione:

$$P_f = \Phi(-\beta) = \int_{-\infty}^{-\beta} N_{0,1}(x) dx$$

in cui  $\Phi(\cdot)$  è la funzione di ripartizione (integrale della funzione densità di probabilità) della v.a. normale standard, caratterizzata da valore medio nullo e scarto standard unitario.

Ricordiamo che una variabile Normale (o gaussiana) ha l'espressione:

$$N_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

mentre una variabile Normale standard ha valor medio nullo e scarto standard unitario ed è quindi del tipo:

$$N_{0,1}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Con riferimento al problema studiato in precedenza, facciamo l'ipotesi che tanto S che R siano variabili normali ed indipendenti (n.b. l'ipotesi di distribuzione normale è necessaria per poter utilizzare il metodo di livello 2).

Allora anche la funzione “stato limite”

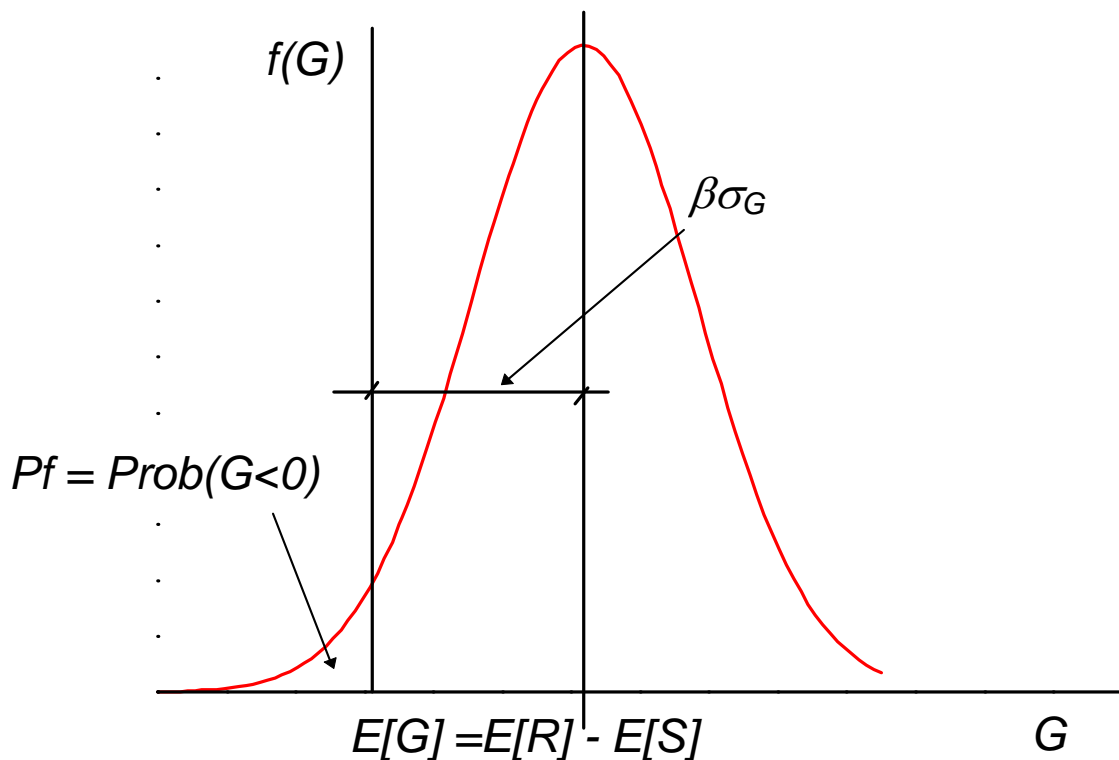
$$G = R - S$$

è normale, in quanto frutto di operazioni lineari su v.a. normali, ed è caratterizzata dalle seguenti proprietà statistiche:

$$E[G] = E[R] - E[S] \quad ; \quad \text{var}[G] = \text{var}[R] + \text{var}[S]$$

od anche, con notazione diversa:

$$\sigma_G^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$$



Allora si ha:

$$P_f = \text{Prob}(G < 0) = \int_{-\infty}^0 f(G) dg = \int_{-\infty}^{\frac{0-E[G]}{\sigma[G]}} N_{0,1}(x) dx = \Phi \left\{ -\frac{E[G]}{\sigma[G]} \right\} = \Phi \left\{ -\frac{E[R]-E[S]}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right\} = \Phi \{-\beta\}$$

$$\beta = \frac{E[R]-E[S]}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

$\beta$  assume il significato fisico notevole di distanza del punto  $E[G]$  dall'origine del sistema di riferimento, motivo per il quale  $\beta$  è anche denominato “distanza di sicurezza”.

Nel caso generale di problema multidimensionale torna utile studiare il problema anziché nello spazio delle v.a. originarie  $\underline{X}$ , in quello di variabili aleatorie normali standard  $\underline{Y}$  equivalenti.

$\underline{X}$  ed  $\underline{Y}$  sono vettori ad n componenti che raccolgono le variabili interessate.

L'operazione di proiezione consiste nella relazione seguente:

$$Y_i = \frac{X_i - E[X_i]}{\sigma_{X_i}}$$

Corrispondentemente la funzione di stato limite

$$G(\underline{X}) = 0$$

viene proiettata nel nuovo spazio di variabili normali standard ottenendo la:

$$Z(\underline{Y}) = 0$$

La nuova condizione di stato limite può essere sviluppata in serie di Taylor, arrestandosi ai termini del 1° ordine (da cui il nome del metodo First Order Second Moment, FOSM) di punto iniziale nell'origine:

$$Z(\underline{Y}) \cong Z(\underline{Y})_0 + \left[ \frac{\partial Z}{\partial Y_i} \right]_0 \underline{Y} = 0$$

$$\text{Ponendo } \alpha_i = \left[ \frac{\partial Z}{\partial Y_i} \right]_0$$

si giunge alla:

$$Z(\underline{Y})_0 + \sum_n \alpha_i y_i = 0$$

Si nota che questa è l'equazione di un iperpiano, tangente alla superficie  $Z(\underline{Y})$  nel punto di minima distanza dall'origine.

Tale distanza è proprio il valore di  $\beta$ , che rappresenta anche il raggio della sfera tangente alla superficie di stato limite:

$$\beta = \min \left\{ \sqrt{\sum_n Z(y_i)^2} \right\}$$

Il punto P in cui si verifica la tangenza tra l'iperpiano e la superficie di stato limite è detto "punto di progetto".

La soluzione del problema di minimo connesso al calcolo di  $\beta$  può essere ottenuta per via iterativa.

Nel caso, però, in cui la  $Z(\underline{Y}) = 0$  non sia espressa in forma analitica, non è possibile valutare le derivate parziali di Z rispetto alle variabili normali standard ed il metodo di simulazione diviene obbligatorio.

In ulteriori perfezionamenti del metodo presentato è stata rimossa la limitazione che  $\underline{X}$  sia un vettore composto di v.a. normali (metodo FOR), considerando anche la possibilità di v.a. distribuite in modo qualsiasi, anche dipendenti, ricondotte, mediante opportune trasformazioni, a v.a. normali e non correlate equivalenti.

I metodi di verifica di **Livello 1** sono quelli incorporati nelle normative tecniche.

Essi sono metodi cosiddetti semiprobabilistici, in quanto sono basati sui valori caratteristici delle v.a. e sui coefficienti parziali di sicurezza.

A Livello 1 il problema della sicurezza si riconduce alla seguente disuguaglianza:

$$\gamma_S S_K \leq \frac{R_K}{\gamma_R}$$

in cui  $S_K$  ed  $R_K$  sono i valori caratteristici rispettivamente degli effetti delle azioni e delle resistenze e  $\gamma_S$  e  $\gamma_R$  sono i coefficienti parziali di sicurezza sulle azioni e sui materiali.

Allo scopo di comprendere meglio il ruolo dei coefficienti parziali di sicurezza, supponiamo di voler garantire la sicurezza alla rottura semplicemente con la relazione:

$$S_K \leq R_K$$

Calcoliamo la probabilità di rottura  $P_f$  associata all'uso di tale relazione.

Dalla definizione di resistenza caratteristica si ha:

$$\text{Prob}(R < R_k) = 0.05$$

e da quella di carico caratteristico:

$$\text{Prob}(S < S_k) = 0.95$$

o anche:

$$\text{Prob}(S > S_k) = 0.05$$

Ipotizzando la indipendenza statistica di  $S$  ed  $R$  si può allora scrivere:

$$P_f = \text{Prob}\{R < R_k \text{ e } S > S_k\} = 0.05 \times 0.05 = 0.0025$$

Tale valore della probabilità di rottura è troppo grande rispetto a quelli comunemente considerati ammissibili ( $10^{-5}$ - $10^{-6}$ ).

Il ruolo dei coefficienti parziali di sicurezza è allora proprio quello di diminuire il valore della probabilità di rottura che proviene dall'uso del calcolo semplificato sopra descritto.

In sostanza i coefficienti parziali di sicurezza fanno passare i frattili 5% a frattili 5 per mille ed i frattili 95 % a frattili 995 per mille:

$$Prob\left\{R < \frac{R_k}{\gamma_R}\right\} \approx 0.005;$$

$$Prob\{S < \gamma_S S_k\} \approx 0.995$$

E quindi la probabilità di rottura diventa:

$$P_f = Prob\left\{R < \frac{R_K}{\gamma_R} \text{ e che } S > \gamma_S S_K\right\} = 0.005 \times 0.005 = 0.000025 = 2.5 \times 10^{-5}$$

che è un valore ragionevole di probabilità di rottura.

A tale scopo i coefficienti parziali di sicurezza vanno opportunamente “calibrati” utilizzando metodi di analisi di livello superiore (2 o 3).