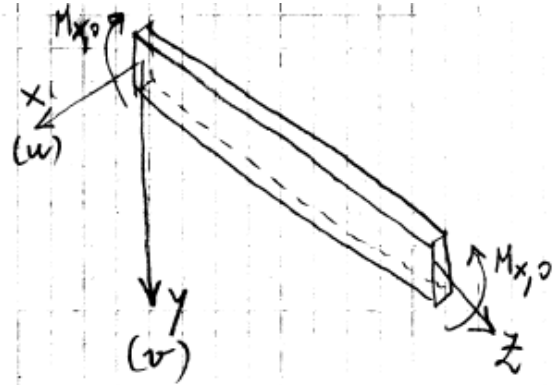


INSTABILITÀ LATERALE DELLE TRAVI INFLESSE

Consideriamo una trave sollecitata a flessione semplice nel piano yz - La flessione è retta, nello stesso piano, poiché un asse principale della sezione giace nello stesso piano.



La configurazione deformata della trave è equilibrata: si vuole conoscere la qualità di tale equilibrio, stabile, indifferente, instabile.

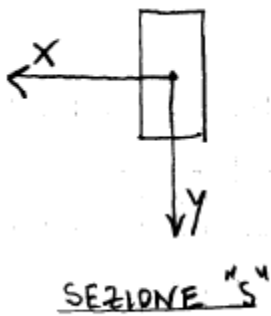
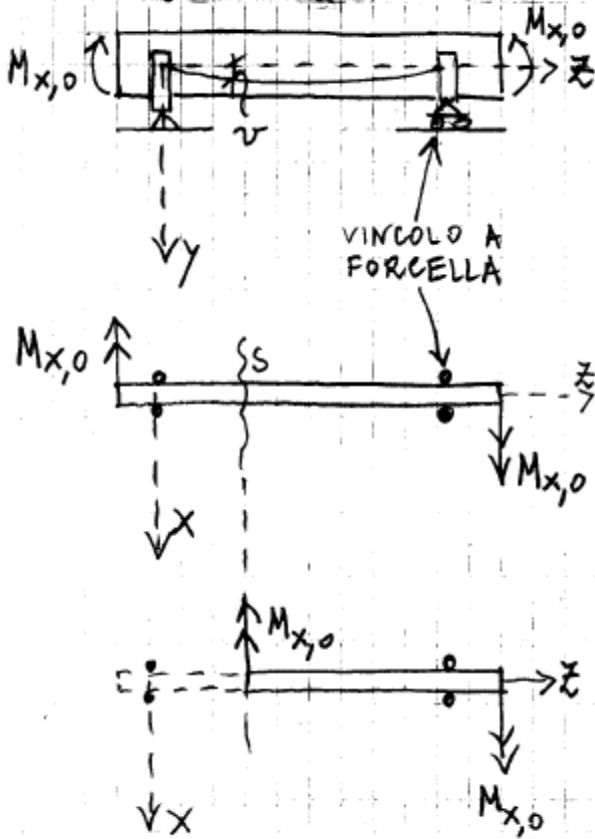
A tale scopo perturbiamo la configurazione iniziale, portandola in una configurazione diversa, soggetta anche a flessione laterale e torsione.

Se l'equilibrio è indifferente la configurazione perturbata è anch'essa equilibrata - Il momento $M_{x,0,c}$ che corrisponde all'equilibrio indifferente (punto di biforcazione dell'equilibrio) è il momento flettente "critico".

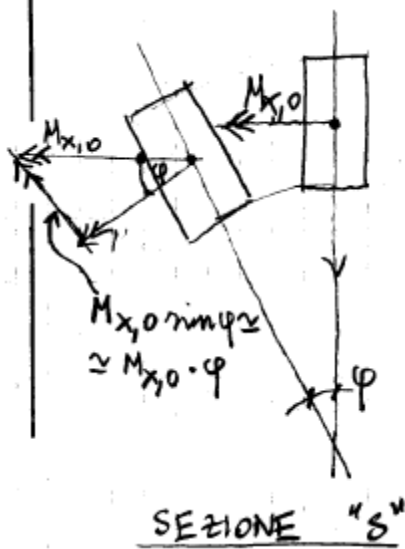
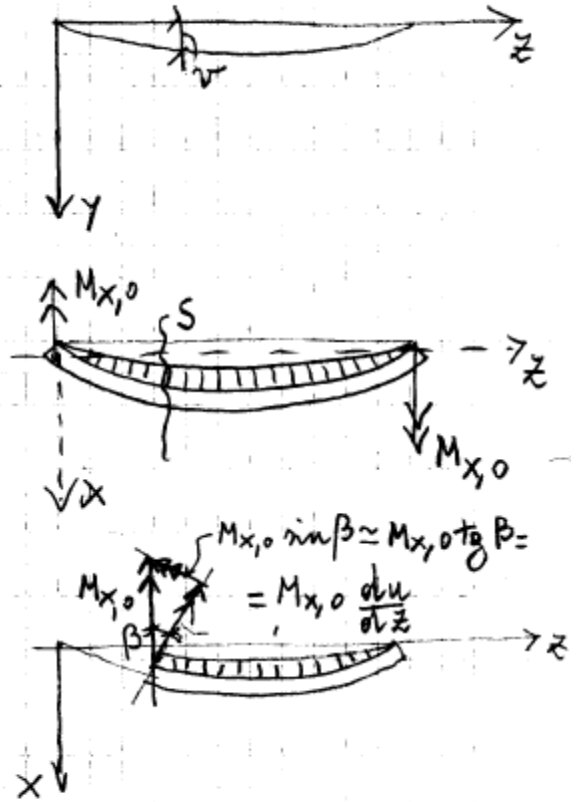
L'instabilità fless-torsionale si manifesta per travi a sezione rettangolare con $J_x \gg J_y$.

SEZIONE RETTANGOLARE, $M_{x,0} = \text{cost}$

Configurazione iniziale



Configurazione variata



La direzione di $M_{x,0}$ non cambia dalla configurazione originaria a quella variata.

Determinando nella configurazione variata i momenti flettenti e torcenti che agiscono sulla sezione generica, si trova:

Momento flettente laterale: $M_y = M_{x,0} \sin \varphi \approx M_{x,0} \cdot \varphi$

Momento torcente: $M_t = M_{x,0} \sin \beta \approx M_{x,0} \cdot \beta = M_{x,0} \frac{du}{dz}$

Nella situazione di equilibrio indifferente sono possibili, per lo stesso valore del momento $M_{x,0,0}$, due configurazioni di equilibrio: scriviamo per ciascuna le 3 equazioni di equilibrio.

<u>Configurazione iniziale</u>	<u>Configurazione variata</u>
1) $M_{x,0} = -EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2}$	$M_{x,0} = -EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2}$
2) $M_y = 0$	$M_y = M_{x,0} \cdot \varphi = -EJ_y \frac{d^2 u}{dz^2}$
3) $M_t = 0$	$M_t = M_{x,0} \frac{du}{dz} = GJ_p \frac{d\varphi}{dz}$

Per determinare $M_{x,0,0}$ sono sufficienti le ultime due equazioni della configurazione variata, che contengono le funzioni incognite φ ed u . Manipoliamo le due equazioni differenziali per ricondurci ad una sola equazione. (vogliamo eliminare u)

Dalla seconda si ricava:

$$\frac{dw}{dz^2} = - \frac{M_{x,0} \varphi}{EJ_y}$$

Deriviamo la 3^o rispetto a z :

$$M_{x,0} \frac{d^2 u}{dz^2} = GJ_p \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$$

↓

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{GJ_p}{M_{x,0}} \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$$

Equagliando le due espressioni di $\frac{d^2 u}{dz^2}$ si ha:

$$\frac{GJ_p}{M_{x,0}} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{M_{x,0}}{EJ_y} \varphi$$

Si ottiene così:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{M_{x,0}^2}{EJ_y GJ_p} \varphi = 0$$

Eq. diff. del 2° ordine,
omogenea → 2 condizioni
al contorno

Poniamo: $\alpha^2 = \frac{M_{x,0}^2}{EJ_y GJ_p}$, si ha:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \alpha^2 \varphi = 0$$

È formalmente identica all'equazione dell'asta di Eulero.

La soluzione generale \bar{z} :

$$\varphi(z) = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z$$

Condizioni al contorno:

$$\left. \begin{array}{l} |\varphi|_{z=0} = 0 \\ |\varphi|_{z=l} = 0 \end{array} \right\} \text{incastro torsionale in corrispondenza} \\ \text{dei vincoli a forcella.}$$

$$0 = A \sin 0 + B \cos 0 \rightarrow 0 = A \times 0 + B \times 1 \rightarrow B = 0$$

$$0 = A \sin \alpha l \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \text{ soluzione banale} = \text{configurazione} \\ \text{risu iniziale} \\ \sin \alpha l = 0 \end{array} \right.$$

$$\sin \alpha l = 0 \rightarrow \alpha l = \pi \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{l} \rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$$

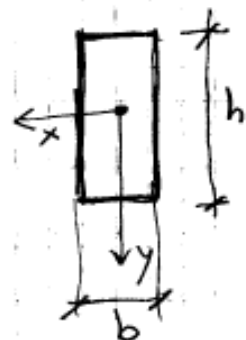
$$\alpha^2 = \frac{M_{x,0,\omega}^2}{E J_y G J_p} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$M_{x,0,\omega} = \frac{\pi}{l} \sqrt{E J_y G J_p}$$

Nel caso della sezione rettangolare di acciaio ($\nu = 0,3$)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+0,3)} = \frac{E}{2,6}$$

$$J_y = \frac{1}{12} h b^3; \quad J_p = \frac{1}{3} h b^3$$



$$EJ_y GJ_p = \frac{E^2}{2.6} \cdot \frac{hb^3}{12} \cdot \frac{hb^3}{3} = \frac{E^2 h^2 b^6}{2.6 \times 2^2 \times 3^2}$$

$$M_{x,0,cr} = \frac{\pi}{l} \frac{E h b^3}{2 \times 3} \times \frac{1}{\sqrt{2.6}} = 0.325 \frac{E h b^3}{l}$$

Esempio numerico

$l = 4,00 \text{ m} = 4000 \text{ mm}$ $f_{yk} = 235 \text{ N/mm}^2$ (Acciaio tipo S235)

$h = 250 \text{ mm}$

$b = 15 \text{ mm}$

$$W_{el} = \frac{bh^2}{6} = \frac{15 \cdot 250^2}{6} = 156250 \text{ cm}^3$$

$$W_p = \frac{bh^2}{4} = \frac{15 \cdot 250^2}{4} = 234375 \text{ cm}^2$$

$$M_{c,Rd} = M_{el,Rd} = \frac{W_{el,\min} \cdot f_{yk}}{\gamma_{M0}} = \frac{156250 \cdot 235}{1,05} = 34,97 \text{ KNm}$$

$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl,\min} \cdot f_{yk}}{\gamma_{M0}} = \frac{234375 \cdot 235}{1,05} = 52,46 \text{ KNm}$$

Il Momento ultimo nei confronti della instabilità flessio-torsionale vale:

$$M_{x,0,cr} = 0,325 = \frac{210000 \cdot 250 \cdot 15^3}{4000} = 14,40 \text{ KNm}$$

Come si può vedere la instabilità flessio-torsionale impedisce non solo la completa plasticizzazione, ma anche lo snervamento.

La effettiva tensione massima è:

$$\sigma = \frac{M_{x,0,cr}}{W_{el}} = \frac{14,40 \cdot 10^6}{156250} = 92,16 \text{ N/mm}^2 \ll \frac{235}{1,05} \text{ N/mm}^2$$

Le considerazioni qui svolte possono essere estese al caso di momento flettente variabile lungo la trave e di sezioni trasversali a doppio T, ma, per ragioni di tempo, non affronteremo tali problemi.