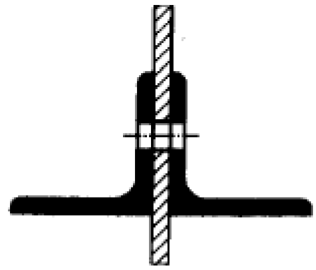
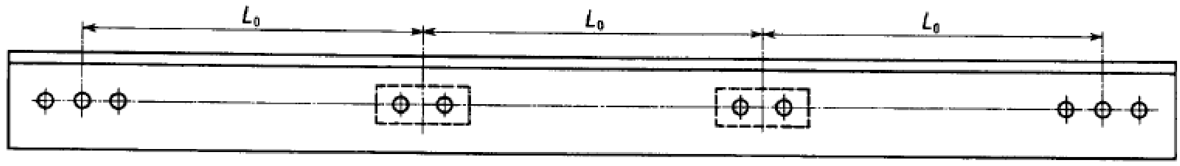
LEZIONE N° 14: GIOVEDÌ 22/10/2009

ELEMENTI STRUTTURALI COMPRESSI

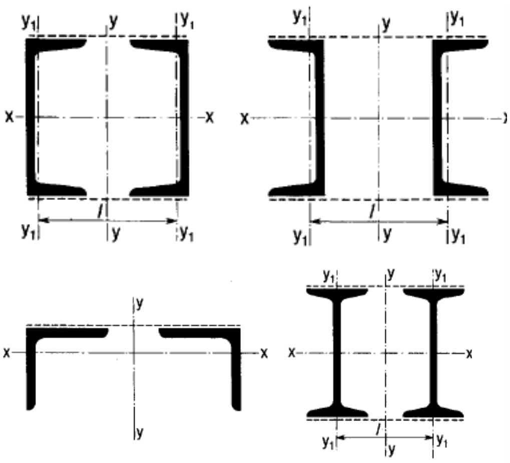
Gli elementi strutturali compressi sono presenti nelle colonne degli edifici, nelle travi reticolari, nelle strutture di controvento, ecc …

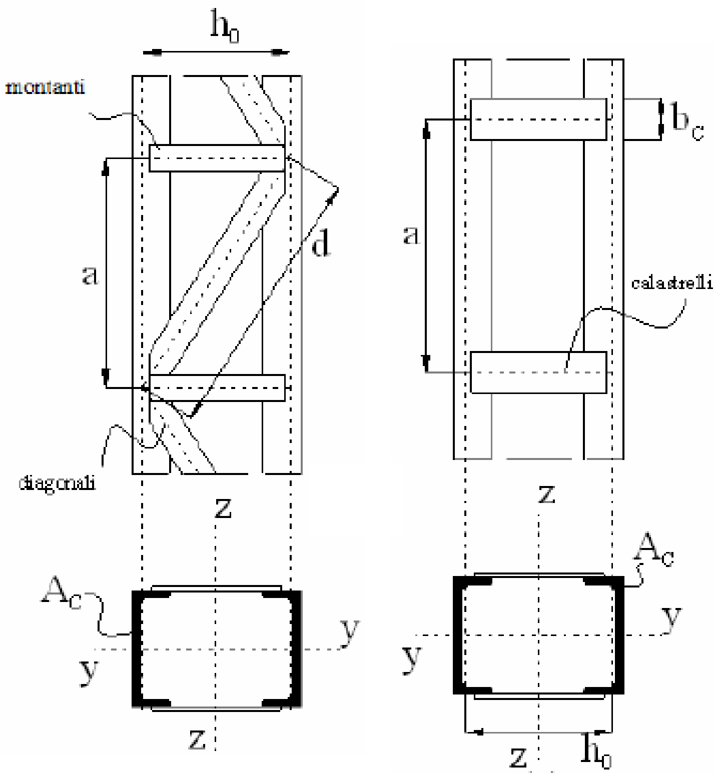
Nelle travi reticolari i puntoni sono di regola costituiti da due profilati paralleli (aste composte), fra i quali vengono ogni tanto interposte piastre di imbottitura, unite ai profilati mediante bulloni e saldature a cordone d’angolo.





Le colonne degli edifici per abitazione sono di solito costituite da un unico profilato HE.
Le colonne possono anche essere composte, con elementi di collegamento a calastrello oppure a traliccio.

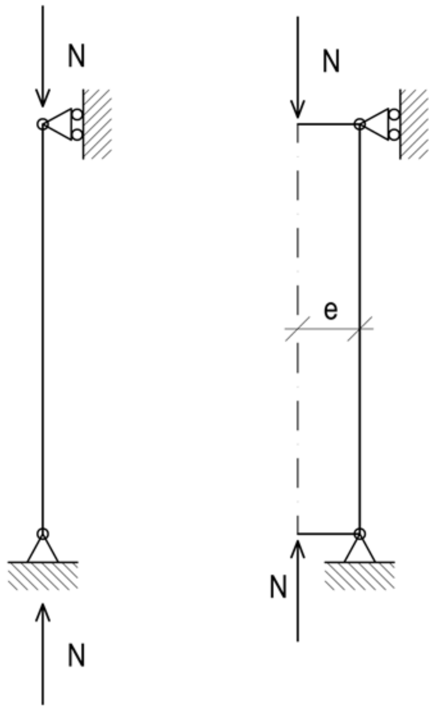




Per le aste semplici sono disponibili due modelli di calcolo:

1) Il primo prevede
   a) l'asta perfettamente rettilinea;
   b) la sezione costante;
   c) il carico centrato;
   d) il materiale perfettamente elastico.

2) Il secondo modello prevede la presenza di un carico eccentrico invece di quello centrato. Le altre ipotesi di base sono le stesse.



Anche se il modello di calcolo della struttura fornisce per l'asta compressa solo la forza normale, considerando nullo il momento flettente, occorre tener presente che nelle aste reali (aste industriali) esistono sempre tre tipi di imperfezioni, per cui il primo modello di fatto non è mai realizzato, mentre il secondo risulta più realistico, anche se non si conosce esattamente il valore dell'eccentricità *e*.

Asta di Eulero

Imperfezioni delle aste industriali:

a) Imperfezioni geometriche : linea d'asse curva;
b) Imperfezioni strutturali:
   b1) auto tensioni dovute al raffreddamento non uniforme dopo la laminazione a caldo;
   b2) dispersione dei valori della tensione di snervamento fy lungo la sezione trasversale dell'asta.

Se le imperfezioni geometriche relative alla non rettilineità dell'asse non superano il valore di 1/1000 della luce libera di inflessione e se le imperfezioni strutturali sono quelle derivanti dai normali processi industriali a produzione controllata, si adotta come modello di calcolo dell'asta industriale, imperfetta, il modello dell'asta di Eulero e si tiene conto delle imperfezioni adottando le curve d'instabilità delle Norme, che sono divise in 5 categorie, secondo il prospetto della pagina seguente.

Le curve di instabilità sono espresse in termini di $\chi = \chi\left(\bar{\lambda}\right)$, in cui il coefficiente χ è il rapporto tra la tensione critica e la tensione di snervamento. Esso dipende dal tipo di sezione e dal tipo di acciaio impiegato e si desume, in funzione della snellezza adimensionale,

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_{yk}}{N_{cr}}} \quad \textit{per le sezioni di classe}\, 1, 2\, e\, 3$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} \cdot f_{yk}}{N_{cr}}} \quad \textit{per le sezioni di classe}\, 4.$$

dalla formula:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1,0$$

dove $\Phi = 0,5\left[1 + \alpha\left(\bar{\lambda} - 0,2\right) + \bar{\lambda}^2\right]$, α è il fattore di imperfezione, ricavato dalla Tab. 4.2.VI.

Nelle formule precedenti N_{cr} è il carico critico elastico dell'asta di Eulero.

L'andamento del coefficiente χ è riportato nel diagramma seguente.

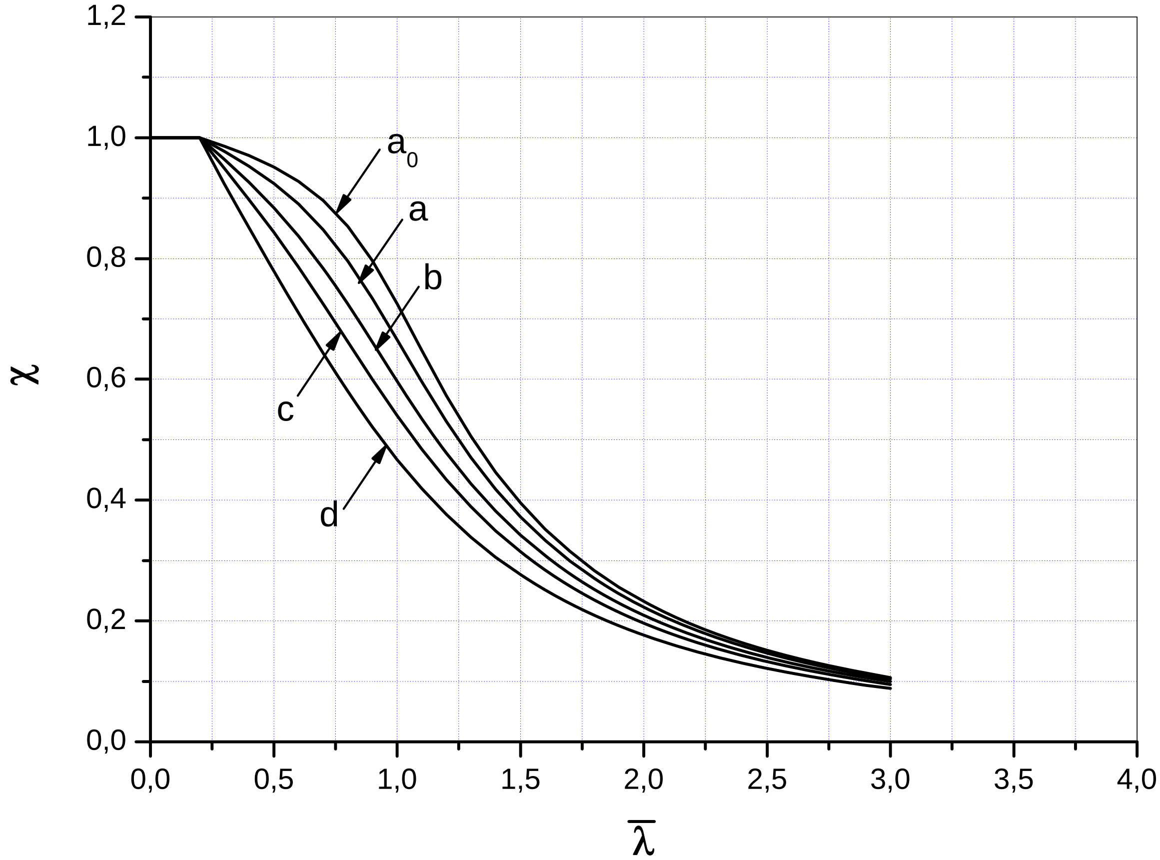
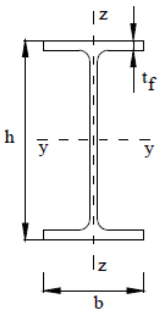
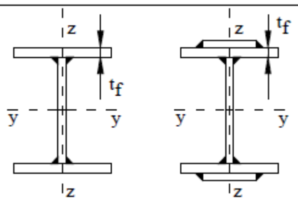
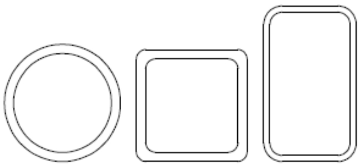
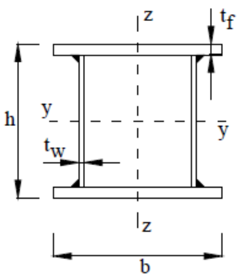
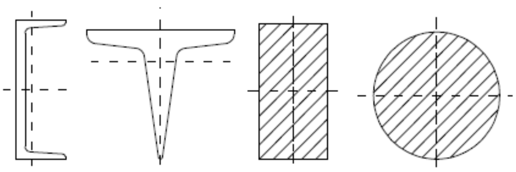
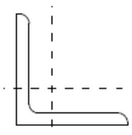


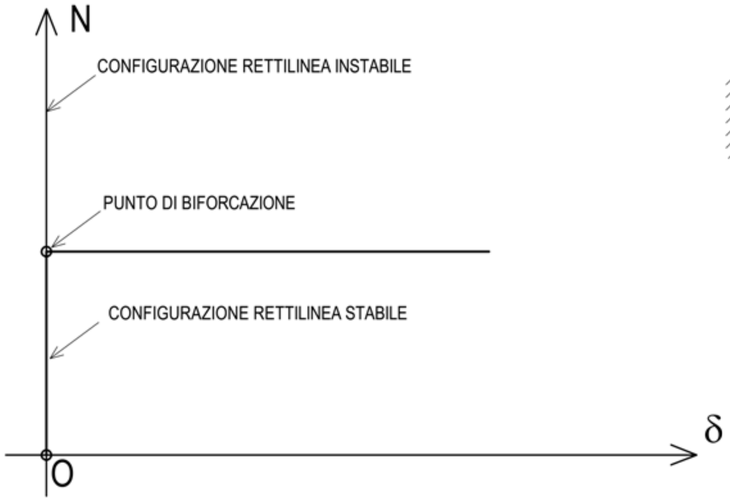
Tabella 4.2.VI *Curve d'instabilità per varie tipologie di sezioni e classi d'acciaio, per elementi compressi.*

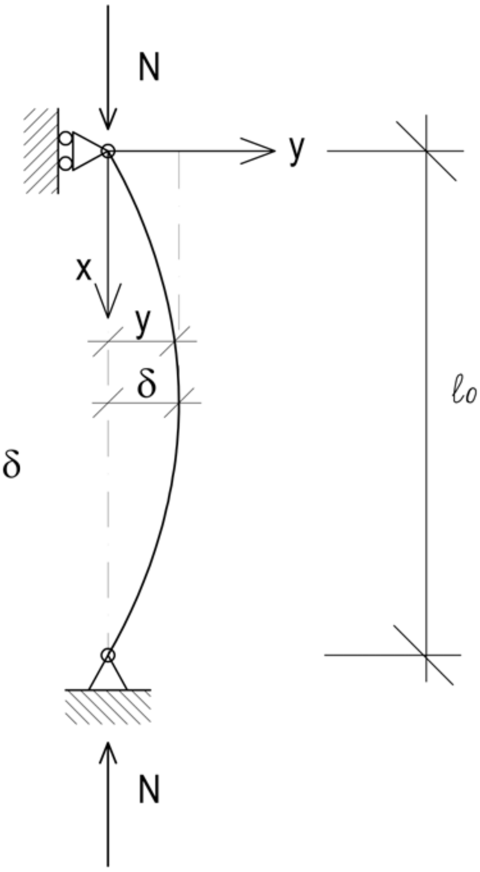
Sezione trasversale		Limiti		Inflessione intorno all'asse	Curva di instabilità S235, S275, S355, S420	Curva di instabilità S460
Sezioni laminate		$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40$ mm	y-y z-z	a b	a_0 a_0
			40 mm $< t_f \leq$ 100 mm	y-y z-z	b c	a a
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq$ 100 mm	y-y z-z	b c	a a
			$t_f >$ 100 mm	y-y z-z	d d	c c
Sezioni ad I saldate		$t_f \leq 40$ mm		y-y z-z	b c	b c
		$t_f > 40$ mm		y-y z-z	c d	c d
Sezioni cave		Sezione formata "a caldo"		qualunque	a	a_0
		Sezione formata "a freddo"		qualunque	c	c
Sezioni scatolari saldate		In generale		qualunque	b	b
		saldature "spesse": $a>0.5t_f$; $b/t_f<30$; $h/t_w<30$		qualunque	c	c
Sezioni piene, ad U e T				qualunque	c	c
Sezioni ad L				qualunque	b	b

Curva di instabilità	a_0	a	b	c	d
Fattore di imperfezione α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

RICHIAMI E CHIARIMENTI

Determinazione del carico critico N_{cr} che separa la configurazione rettilinea stabile dalla configurazione rettilinea instabile (carico di biforcazione).





Consideriamo, oltre alla configurazione originaria rettilinea, una configurazione perturbata curvilinea che si trovi nella condizione di equilibrio indifferente. Scriviamo la condizione di equilibrio.

$$M_{\text{int}} = M_{est}$$

in cui

$$M_{\text{int}} = -\frac{EJ}{r} \simeq -EJ\,\frac{d^2 y}{dx^2}$$ (considerando l’espressione linearizzata della curvatura)

$$M_{est} = N \cdot y$$

Si ha allora:

$$-EJ\,\frac{d^2 y}{dx^2} = N \cdot y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N}{EJ} \cdot y = 0$$

E’ questa un’equazione differenziale omogenea del 2° ordine lineare e a coefficienti costanti, che richiede, per la sua soluzione, la imposizione di due condizioni al contorno.
Posto, per comodità:

$$\alpha^2 = \frac{N}{EJ}$$

Si ottiene:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$$

Il suo integrale generale è:

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

Le condizioni al contorno sono:

$$y_{x=0} = 0 \ ; \ y_{x=l_0} = 0$$

Imponendo la prima condizione si ottiene:

$$C_1 \sin \alpha 0 + C_2 \cos \alpha 0 = 0 \ \ \rightarrow C_2 = 0$$

Dalla seconda si ha:

$$C_1 \sin \alpha l = 0$$

Affinché non si ottenga la soluzione banale occorre che sia:

$$\sin \alpha l = 0 \ \ \rightarrow \alpha l = k\pi \ \ \rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{l}$$

Sostituendo il valore di α nella $\alpha^2 = \frac{N}{EJ}$, si ha:

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \frac{N_{cr}}{EJ} \ \rightarrow N_{cr} = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}$$

che rappresenta una famiglia di carichi critici, crescenti con k.
Il primo carico critico, che si ha per k=1, è il carico critico di Eulero:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Dividiamo ora l'equazione precedente, membro a membro, per l'area della colonna, A:

$$\frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2}\frac{J}{A}$$

Il primo membro rappresenta la tensione critica: $\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A}$.

Ricordiamo poi che il rapporto tra il momento d'inerzia e l'area di una sezione corrisponde al quadrato del raggio d'inerzia *i*: $i^2 = \frac{J}{A}$.

Si ottiene quindi:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{l^2} i^2$$

Definiamo ora la snellezza λ come:

$$\lambda = \frac{l}{i}$$

e si ha:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

che è l'equazione dell'iperbole di Eulero, che lega snellezza e tensione critica.

Quando $\sigma_{cr} = f_{yk}$ si ha:

$$f_{yk} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_p^2}$$

Si può allora individuare il significato fisico del coefficiente $\bar{\lambda}$. Difatti:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_{yk}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_{yk}}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\lambda_p^2}\frac{\lambda^2}{\pi^2 E}} = \frac{\lambda}{\lambda_p}$$

Chiamiamo χ il rapporto tra tensione critica e tensione di snervamento:

$$\chi = \frac{\sigma_{cr}}{f_{yk}}$$

Si può quindi esprimere l'iperbole di Eulero in funzione di $\bar{\lambda}$ dividendo σ_{cr} per f_{yk}.

Si ottiene allora:

$$\frac{\sigma_{cr}}{f_{yk}} = \frac{N_{cr}}{A\, f_{yk}} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} = \chi$$

L'iperbole di Eulero $\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ diventa quindi:

$$\chi = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$